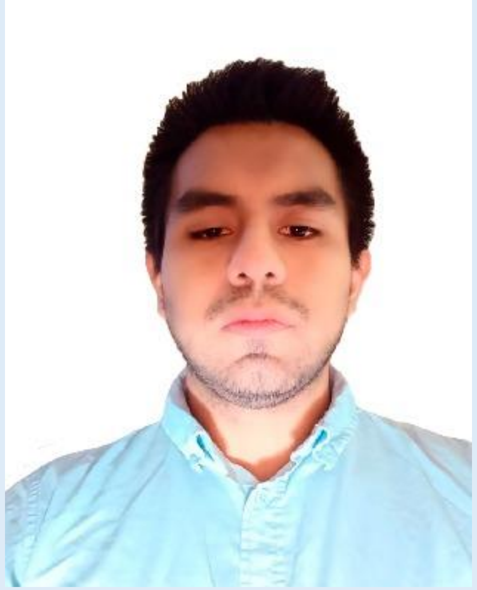


Profesor:
Ricardo Espino Lizama

PITAGORAS ACADEMIA

ÁLGEBRA

GRUPO PITÁGORAS

1. – *Definición*

Una sucesión real es una secuencia de números reales que puede ser definida de las siguientes maneras:

1.1. – *Definición por regla de correspondencia*

Sea la sucesión $\{\boldsymbol{a_n}\}_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^+}$ $\quad$ (*o también* $\{\boldsymbol{a_n}\}_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}}$ *o* $\{\boldsymbol{a_n}\}_{\boldsymbol{n}\geq\boldsymbol{1}}$)

definida de manera que $\boldsymbol{a_n = f(n)}$ *para todo* $n \in \mathbb{Z}^+$

Regla de correspondencia o ***Término n – ésimo***

Ejemplo:

Sea la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ *definida por* $\boldsymbol{a_n = f(n) = \dfrac{2n+1}{n+2}}$

$$a_1 = f(1) = \frac{2(1)+1}{1+2} = 1 \qquad a_2 = f(2) = \frac{2(2)+1}{2+2} = \frac{5}{4} \qquad a_3 = f(3) = \frac{2(3)+1}{3+2} = \frac{7}{5}$$

Es decir:

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+} = \left\{1; \frac{5}{4}; \frac{7}{5}; \dots; \frac{2n+1}{n+2}; \dots\right\}$$

$1.2. - \underline{\boldsymbol{Definición\ por\ regla\ de\ recurrencia}}$

Sea la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ *definida de manera que*

$$\boldsymbol{a_{n+k} = f(a_n; a_{n+1}; a_{n+2}; \dots; a_{n+k-1})\ para\ todo\ n \in \mathbb{Z}^+}$$

Es decir, ***un término depende de los anteriores.***

Regla de recurrencia

Ejemplo:

Sea la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ *definida por* $\boldsymbol{a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \ \wedge\ a_1 = a_2 = 1}$

Aplicando la regla de recurrencia para $n = 1$ $\quad a_3 = a_2 + a_1 \quad \boxed{\rightarrow \boldsymbol{a_3 = 1 + 1 = 2}}$

Aplicando la regla de recurrencia para $n = 2$ $\quad a_4 = a_3 + a_2 \quad \boxed{\rightarrow \boldsymbol{a_4 = 2 + 1 = 3}}$

Aplicando la regla de recurrencia para $n = 3$ $\quad a_5 = a_4 + a_3 \quad \boxed{\rightarrow \boldsymbol{a_5 = 3 + 2 = 5}}$

Aplicando la regla de recurrencia para $n = 4$ $\quad a_6 = a_5 + a_4 \quad \boxed{\rightarrow \boldsymbol{a_6 = 5 + 3 = 8}}$

Aplicando la regla de recurrencia para $n = 5$ $\quad a_7 = a_6 + a_5 \quad \boxed{\rightarrow \boldsymbol{a_7 = 8 + 5 = 13}}$

Es decir: $\quad \{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+} = \{1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; \dots\}$

La cual es conocida como la ***SUCESIÓN DE FIBONACCI***

$2.-$*Sucesiones Notables*

$2.1.-$*Progresión Aritmética*

Sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ *definida de la siguiente forma:* $a_{n+1} = a_n + r \quad \wedge \quad a_1 = a \quad (r \neq 0)$

Ejemplo:

Sea la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ *tal que* $a_{n+1} = a_n + 4 \quad \wedge \quad a_1 = 3$

$a_2 = a_1 + 4 \quad \rightarrow a_2 = 3 + 4 = 7$

$a_3 = a_2 + 4 \quad \rightarrow a_3 = 7 + 4 = 11$

$a_4 = a_3 + 4 \quad \rightarrow a_4 = 11 + 4 = 15$

Es decir: $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+} = \{3; 7; 11; 15; 19; \ldots\}$

$\textit{Término } n - \textit{ésimo} = a_n = a_1 + (n-1)r$

$a_n = 3 + (n-1)4$

$\boxed{a_n = 4n - 1}$

$2.2.-$*Progresión Geométrica*

Sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ *definida de la siguiente forma:* $a_{n+1} = a_n . r \quad \wedge \quad a_1 = a \quad (r \neq 0)$

Ejemplo:

Sea la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ *tal que* $a_{n+1} = a_n . 2 \quad \wedge \quad a_1 = 5$

$a_2 = a_1 . 2 \quad \rightarrow a_2 = 5.2 = 10$

$a_3 = a_2 . 2 \quad \rightarrow a_3 = 10.2 = 20$

$a_4 = a_3 . 2 \quad \rightarrow a_4 = 20.2 = 40$

Es decir: $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+} = \{5; 10; 20; 40; \ldots\}$

$\textit{Término } n - \textit{ésimo} = a_n = a_1 . r^{n-1}$

$\boxed{a_n = 5.2^{n-1}}$

$2.3.-$ *Sucesión con diferencias finitas*

Sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ *definida de la siguiente forma:*

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+} = \{a_1; a_2; a_3; a_4; a_5; a_6; \dots\}$$

$$b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad b_4 \quad b_5$$

$$c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4$$

$$\dots$$

$$\Delta \quad \Delta$$

k niveles

Sucesión con diferencias finitas de $k-$ésimo orden

Ejemplo:

Sea la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+} = \{3; 7; 13; 21; 31; 43; \dots\}$

$$4 \quad 6 \quad 8 \quad 10 \quad 12$$

$$2 \quad 2 \quad 2 \quad 2$$

Sucesión con diferencias finitas de ***2do orden***

Ejemplo:

Sea la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+} = \{1; 9; 29; 67; 129; ; \dots\}$

$$8 \quad 20 \quad 38 \quad 62$$

$$12 \quad 18 \quad 24$$

$$6 \quad 6$$

Sucesión con diferencias finitas de ***3er orden***

$\underline{\textit{Cálculo del término } n - \textit{ésimo}}$:

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+} = \{a_1; a_2; a_3; a_4; a_5; a_6; \ldots\}$$

$$b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad b_4 \quad b_5$$

$$c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4$$

$$\ldots$$

$$\Delta \quad \Delta$$

k *niveles*

Sucesión con diferencias finitas de k − ésimo orden

$$\boldsymbol{a_n = a_1 C_0^{n-1} + b_1 C_1^{n-1} + c_1 C_2^{n-1} + \cdots \Delta C_k^{n-1}}$$

Ejemplo:

Sea la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+} = \{3; 7; 13; 21; 31; 43; \ldots\}$

$$4 \quad 6 \quad 8 \quad 10 \quad 12$$

$$2 \quad 2 \quad 2 \quad 2$$

Sucesión con diferencias finitas de 2do orden

$$\boldsymbol{a_n = 3C_0^{n-1} + 4C_1^{n-1} + 2C_2^{n-1}}$$

en general:

$$a_n = 3C_0^{n-1} + 4C_1^{n-1} + 2C_2^{n-1}$$

$$a_n = 3(1) + 4(n-1) + 2\left(\frac{(n-1)(n-2)}{1x2}\right)$$

$$a_n = 3 + 4n - 4 + n^2 - 3n + 2$$

$$\boldsymbol{a_n = n^2 + n + 1}$$

$$a_4 = 3C_0^3 + 4C_1^3 + 2C_2^3$$

$$a_4 = 3(1) + 4(3) + 2\left(\frac{3x2}{1x2}\right)$$

$$a_4 = 21$$

$$a_6 = 3C_0^5 + 4C_1^5 + 2C_2^5$$

$$a_4 = 3(1) + 4(5) + 2\left(\frac{5x4}{1x2}\right)$$

$$a_4 = 43$$

Sea la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+} = \{1; 9; 29; 67; 129; ; \dots\}$

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & & 9 & & 29 & & 67 & & 129 \\ & 8 & & 20 & & 38 & & 62 & \\ & & 12 & & 18 & & 24 & & \\ & & & 6 & & 6 & & & \end{array}$$

Sucesión con diferencias finitas de 3er orden

$$a_n = 1C_0^{n-1} + 8C_1^{n-1} + 12C_2^{n-1} + 6C_3^{n-1}$$

$$a_4 = 1C_0^3 + 8C_1^3 + 12C_2^3 + 6C_3^3$$
$$a_4 = 67$$

$$a_5 = 1C_0^4 + 8C_1^4 + 12C_2^4 + 6C_3^4$$
$$a_5 = 129$$

en general:

$$a_n = 1C_0^{n-1} + 8C_1^{n-1} + 12C_2^{n-1} + 6C_3^{n-1}$$

$$a_n = 1(1) + 8(n-1) + 12\left(\frac{(n-1)(n-2)}{1x2}\right) + 6\left(\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1x2x3}\right)$$

$$a_n = n^3 + n - 1$$

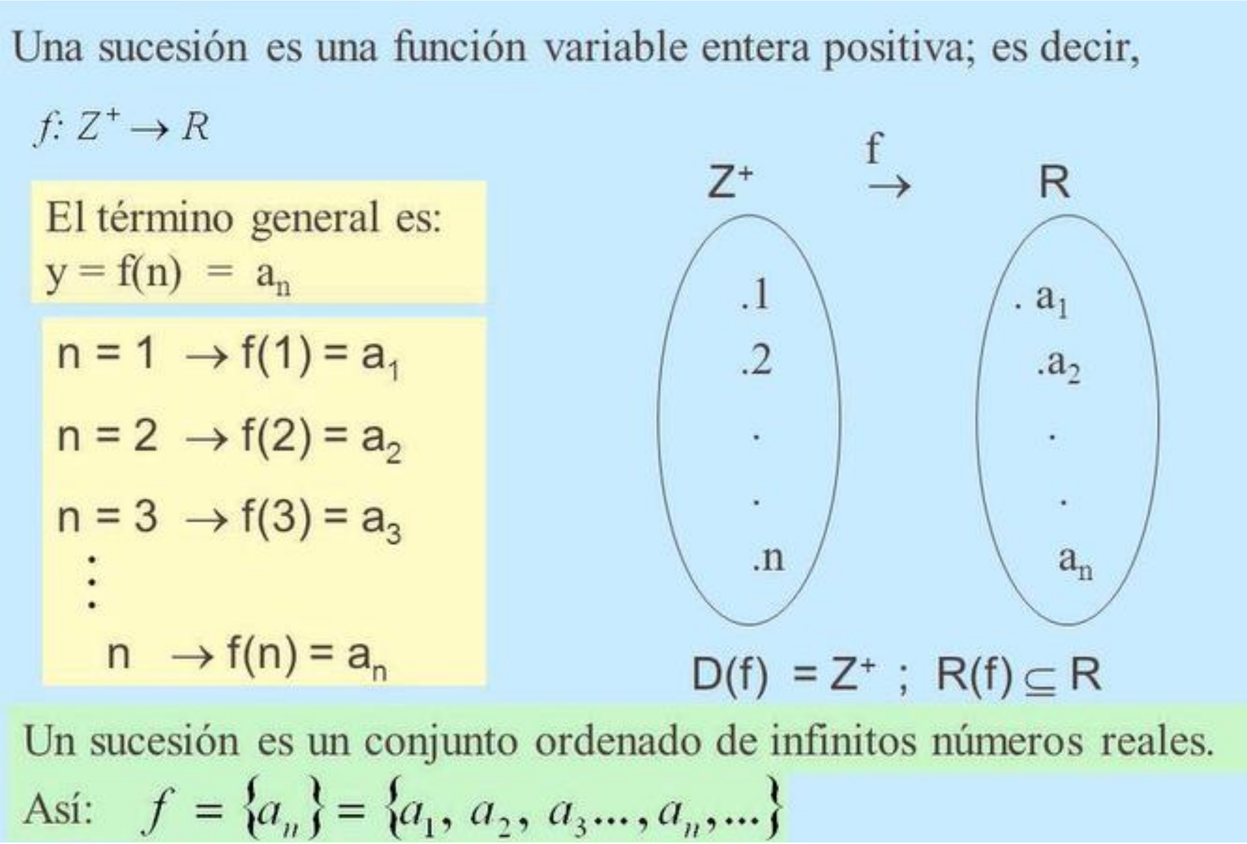
Otras sucesiones notables

1; 2; 3 ; 4 ;……….n		De los números naturales
2; 4; 6; 8; 10;……..	2n	De los números pares
1 ; 3 ; 5; 7 ; 9; ……	2n - 1	De los números impares
1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25 ; ……	n^2	De los números cuadrados
1; 8 ; 27 ; 64 ; 125 ; …..	n^3	De los cubos perfectos
1 ; 3 ; 6 ; 10 ; 15 ; 21 ; …..	$\frac{n(n+1)}{2}$	De los números triangulares
1; 4; 10; 20; 35; ……….	$\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$	De los números tetraédricos
1; 5; 12; 22; ……..	$\frac{n(3n-1)}{2}$	De los números pentagonales
0 ;1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 13 ; ……		Sucesión de FIBONACCI

3. –*Sucesiones como funciones*

3.1. *Definición formal de una sucesión*

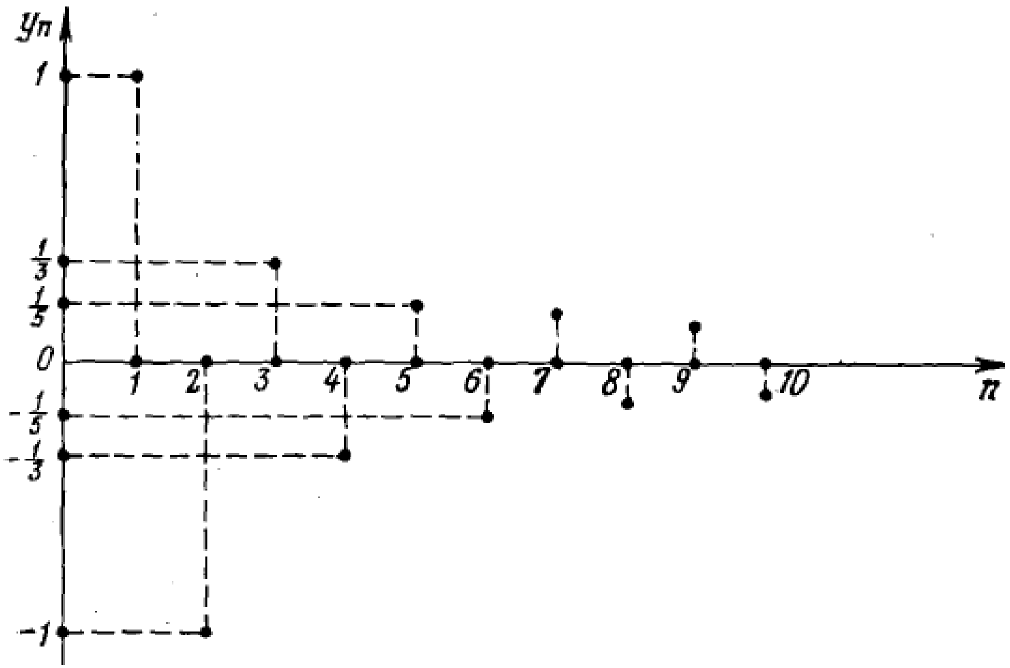
Una sucesión es una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales, la cual asigna a cada número natural, un único número real perfectamente definido como a_n *donde* $n \in \mathbb{N}$



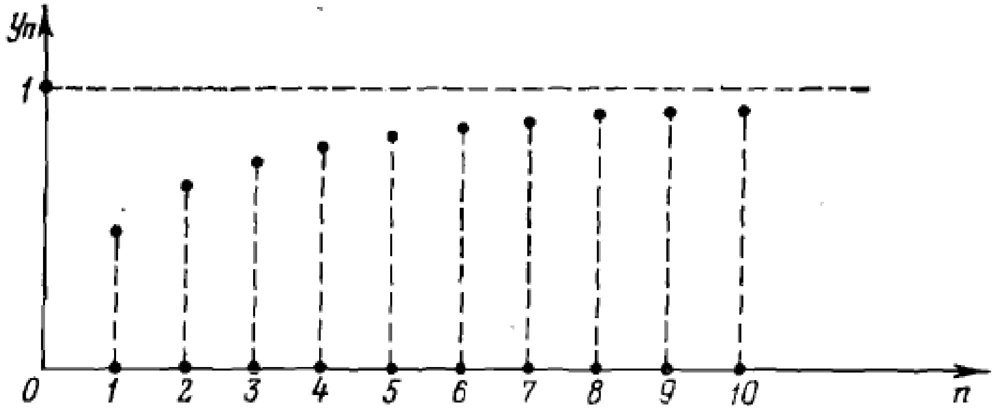
$3.2.$ *Gráfica de una sucesión*

Ya que las sucesiones son funciones. también pueden graficarse.

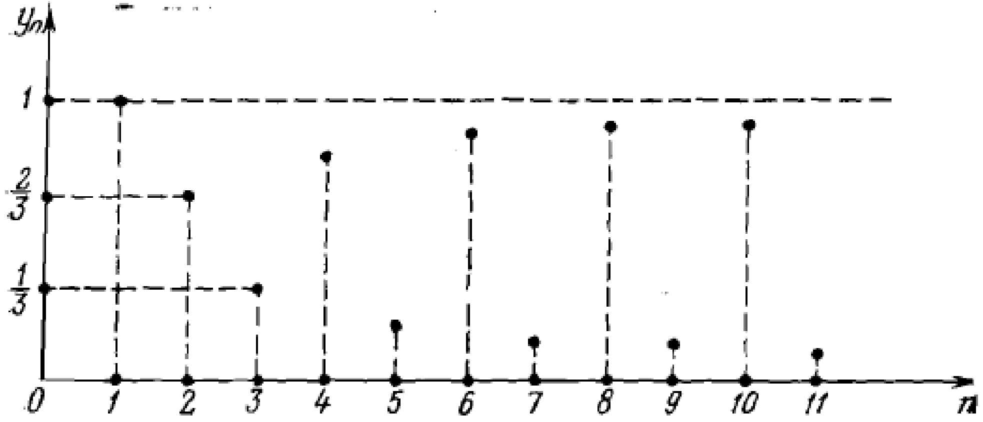
$$\{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+} \text{ donde } b_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n}; & n \text{ es impar} \\ -\dfrac{1}{n-1}; & n \text{ es par} \end{cases}$$



$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+} \text{ donde } a_n = \frac{n}{n+1}$$



$$\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+} \text{ donde } c_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n}; & n \text{ es impar} \\ \dfrac{n}{n+1}; & n \text{ es par} \end{cases}$$



$3.3.$ *Clasificación de las sucesiones*

Ya que las sucesiones son funciones, también se pueden clasificar como monótonas y acotadas.

$3.3.1$ *Sucesión Monótona*

Una sucesión es ***monótona*** *si cumple alguna de las siguientes definiciones*

Sucesión creciente: $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} > a_n$

Sucesión decreciente: $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} < a_n$

Sucesión no creciente: $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} \leq a_n$

Sucesión no decreciente: $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} \geq a_n$

$3.3.2$ *Sucesión Acotada*

Una sucesión es ***acotada*** *si* ***existen m*** $\wedge$ ***M*** $\in \mathbb{R}$ *tal que*

$$m \leq a_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

o equivalentemente ***existe un M*** $\in \mathbb{R}$ *tal que*

$$|a_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$*$ *Si solamente existe un* $m \in \mathbb{R}$ tal que $\boldsymbol{m \leq a_n} \quad \forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$

La sucesión es ***acotada inferiormente***

$*$ *Si solamente existe un* $M \in \mathbb{R}$ tal que $\boldsymbol{a_n \leq M} \quad \forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$

La sucesión es ***acotada superiormente***

$3.3.3$ *Sucesión Alternante*

Una sucesión es alternante cuando sus ***términos consecutivos cambian de signo***

es decir: $a_n . a_{n+1} < 0$

Ejemplo: $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ *donde* $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ $\quad a_n = \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; -\frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \ldots\right\}$

$3.3.3$ *Sucesión Oscilante*

Una sucesión es oscilante cuando ***no converge a ningún número y tampoco diverge a*** $\pm\infty$

Ejemplo:

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ *donde* $a_n = (-2)^n$ $\quad a_n = \{-2; 4; -8; 16; -32; \ldots\}$

08. Indicar el valor de verdad de las afirmaciones siguientes:

I. La sucesión $\{(-1)^{2n+1}\}_{n\in N}$ es acotada.

II. La sucesión $\left\{1-\dfrac{1}{2^n}\right\}_{n\in N}$ es creciente y acotada.

III. La sucesión $\{(-2)^{n+1}\}_{n\in N}$ no esta acotada.

A) VVF B) VFV C) VVV

D) VFF E) FVV

$$I.-\{(-1)^{2n+1}\} = \{-1;-1;-1;-1;\dots\}$$

Entonces decimos que $-2 \le (-1)^{2n+1} \le 0$

Es acotada V

$$II.-\left\{1-\frac{1}{2^n}\right\} = \left\{\frac{1}{2};\frac{3}{4};\frac{7}{8};\frac{15}{16};\dots.\right\}$$

$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{n}+1 > n$

$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad 2^{\mathrm{n}+1} > 2^n$

$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad 0 < \dfrac{1}{2^{\mathrm{n}+1}} < \dfrac{1}{2^n}$

$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad -\dfrac{1}{2^{\mathrm{n}+1}} > -\dfrac{1}{2^n}$

$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad 1-\dfrac{1}{2^{\mathrm{n}+1}} > 1-\dfrac{1}{2^n}$

$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} > a_n$

$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{n} \ge 1$

$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad 2^{\mathrm{n}} \ge 2$

$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad 0 < \dfrac{1}{2^{\mathrm{n}}} \le \dfrac{1}{2}$

$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad -\dfrac{1}{2} \le -\dfrac{1}{2^{\mathrm{n}}} < 0$

$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \dfrac{1}{2} \le 1-\dfrac{1}{2^{\mathrm{n}}} < 1$

Es creciente y acotada V

$$III.-\{(-2)^{n+1}\} = \{4;-8;16;-32;\dots\}$$

No es acotada V

06. Sea $\{a_n\}$ una sucesion definida por

$$a_n = e + \frac{\pi}{\sqrt{n}},$$

Decir el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

I. Una cota de la sucesión es $\pi + e$

II. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es decreciente.

III. El punto de convergencia es πe

A) VVV B) VVF C) VFV

D) FFF E) FFV

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n+1 > n$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sqrt{n+1} > \sqrt{n}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{\pi}{\sqrt{n+1}} < \frac{\pi}{\sqrt{n}}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad e + \frac{\pi}{\sqrt{n+1}} < e + \frac{\pi}{\sqrt{n}}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} < a_n$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq 1$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sqrt{n} \geq 1$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 1$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < \frac{\pi}{\sqrt{n}} \leq \pi$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad e < e + \frac{\pi}{\sqrt{n}} \leq e + \pi$$

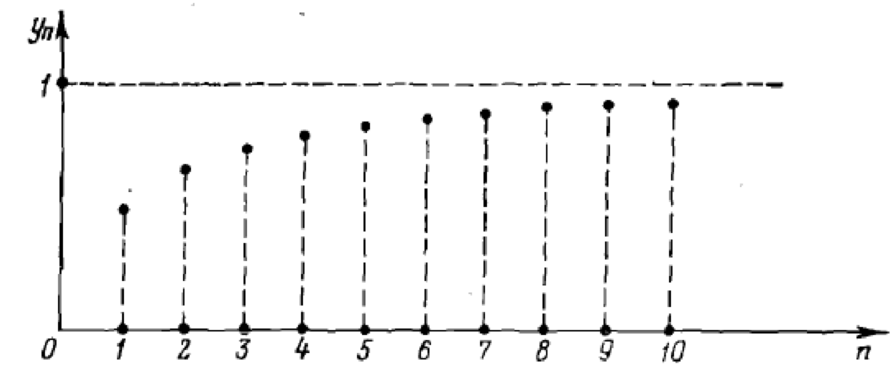
Es decreciente y acotada V

$$\lim_{n\to\infty} e + \frac{\pi}{\sqrt{n}} = e$$

El punto de convergencia es e

4. –Límite de una sucesión

Para entender la noción de límite de una sucesión, analizaremos ciertas gráficas ya vistas

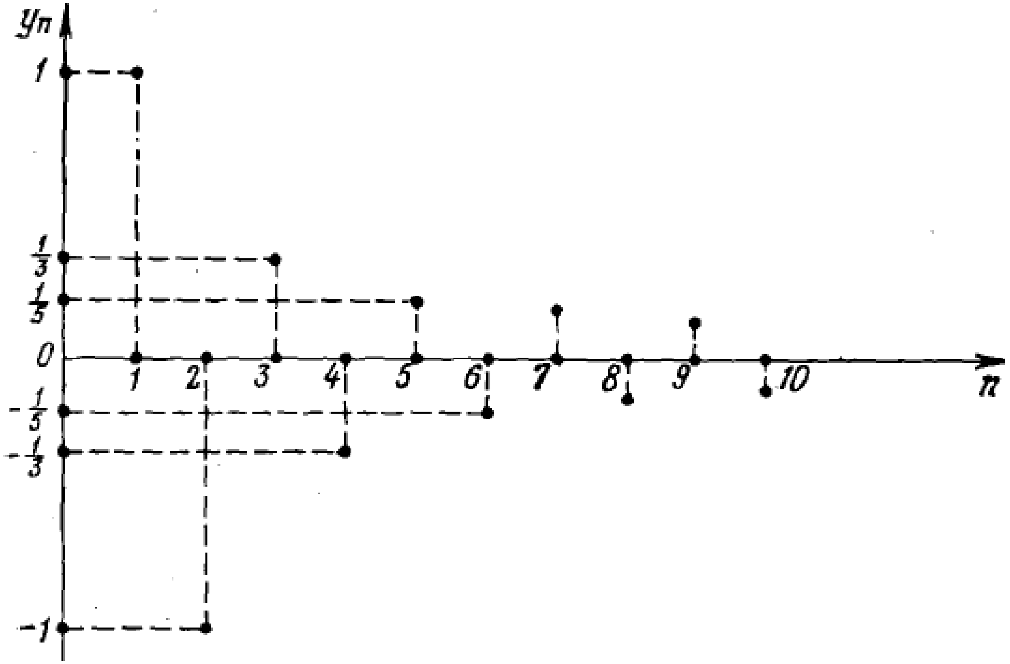


$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+} \text{ donde } a_n = \frac{n}{n+1}$$

En esta sucesión podemos observar claramente que los términos de la sucesión se aproximan cada vez más a 1 *mientras* n *crece indefinidamente*

Esto lo podemos escribir de la siguiente forma:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$



$$\{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+} \text{ donde } b_n = \begin{cases} \frac{1}{n}; & n \text{ es impar} \\ -\frac{1}{n-1}; & n \text{ es par} \end{cases}$$

En este caso si bien los términos cambian de signo. siguen aproximándose a 0 *conforme* n *crece indefinidamente*

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

$Formalmente\ el\ concepto\ de\ Límite\ de\ una\ función, es\ un\ concepto\ muy\ amplio\ y\ profundo\ en\ definiciones$

$Para\ fines\ prácticos, en\ este\ tema\ utilizaremos\ los\ siguiente\ conocimientos:$

$Sean\ \{a_n\}\ y\ \{b_n\}\ sucesiones\ tales\ que:$ $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad \lim_{n\to\infty} b_n \in \mathbb{R}}$

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n \pm b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n}$$

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} c a_n = c \lim_{n\to\infty} a_n \quad ; \quad c \in \mathbb{R}}$$

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n . b_n = \lim_{n\to\infty} a_n . \lim_{n\to\infty} b_n}$$

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} \quad ; \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0}$$

$$\lim_{n\to\infty} n = \lim_{n\to\infty} n^2 = \lim_{n\to\infty} n^3 = \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} = 0$$

$$\lim_{n\to 0} \frac{sen\, n}{n} = 1 \qquad \lim_{n\to 0} \cos n = 1$$

$$\lim_{n\to 0} \frac{tan\, n}{n} = 1 \qquad \lim_{n\to 0} sen\, n = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0; -1 < r < 1 \\ \pm\infty; r > 1 \end{cases}$$

Ejemplo:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} (4)^n = \infty$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{a^x - 1}{x}\right) = \ln a$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{n\to 0} \frac{\ln(n+1)}{n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = 1 \quad \wedge \quad \lim_{n\to\infty} g(n) = \infty$$

$$\to \lim_{n\to\infty} f(n)^{g(n)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} (f(n)-1).g(n)}$$

$$\lim_{n\to\infty} n = \lim_{n\to\infty} n^2 = \lim_{n\to\infty} n^3 = \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} = 0$$

05. Determinar el valor de convergencia de la sucesión:

$$\left\{\frac{5n^2+\sqrt[3]{2-3n^2-27n^6}}{5n^2-3n+2}\right\}_{n\geq 1}$$

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{5}$

D) $\frac{2}{5}$ E) 1

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^2+\sqrt[3]{2-3n^2-27n^6}}{5n^2-3n+2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^2+\sqrt[3]{2-3n^2-27n^6}}{5n^2-3n+2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{5n^2}{n^2}+\frac{\sqrt[3]{2-3n^2-27n^6}}{n^2}}{\frac{5n^2}{n^2}-\frac{3n}{n^2}+\frac{2}{n^2}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5+\sqrt[3]{\frac{2-3n^2-27n^6}{n^6}}}{5-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{5+\sqrt[3]{\frac{2}{n^6}-\frac{3}{n^4}-27}}{5-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5+\sqrt[3]{0-0-27}}{5-0+0} = \frac{2}{5}$$

06. Calcule el valor de convergencia de la siguiente sucesión

$$\{a_n\} = \left\{\left(\frac{2}{3}\right)^4, \left(\frac{3}{4}\right)^5, \left(\frac{4}{5}\right)^6, \left(\frac{5}{6}\right)^7, \ldots\right\}$$

Nota: e es el número de neper

A) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{e}}$ B) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{e}}$ C) $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$

D) $\dfrac{1}{e}$ E) $\dfrac{1}{e^2}$

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = 1 \quad \wedge \quad \lim_{n\to\infty} g(n) = \infty$$

$$\rightarrow \lim_{n\to\infty} f(n)^{g(n)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}(f(n)-1).g(n)}$$

$$a_n = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{n}{n}+\frac{1}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{2}{n}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+0}{1+0}\right) = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} n+3 = \infty$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+3} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}-1\right).(n+3)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+3} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n+2}\right).(n+3)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+3} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-n-3}{n+2}=-1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+3} = \boldsymbol{e^{-1}}$$

15. Determine el valor de convergencia de la sucesión

$$\left\{\left(\frac{9^{\frac{1}{n}}+25^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^{n}\right\}_{n\in N}$$

A) 15 B) e^{15} C) e^{30}

D) ln15 E) 30

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x-1}{x}\right)=\ln a$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{9^{\frac{1}{n}}+25^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{9^{\frac{1}{n}}+25^{\frac{1}{n}}}{2}=\frac{9^0+25^0}{2}1$$

$$\lim_{n\to\infty} n=\infty$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{9^{\frac{1}{n}}+25^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^{n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{9^{\frac{1}{n}}+25^{\frac{1}{n}}}{2}-1\right).n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{9^{\frac{1}{n}}+25^{\frac{1}{n}}-2}{2}\right).n}$$

$$e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{9^{\frac{1}{n}}-1+25^{\frac{1}{n}}-1}{2}\right).n}$$

$$e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{9^{\frac{1}{n}}-1+25^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}\right).\frac{1}{2}}$$

$$e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{9^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}+\frac{\left(25^{\frac{1}{n}}-1\right)}{\frac{1}{n}}\right).\frac{1}{2}}$$

$Ya\ que\ \frac{1}{n}\ tiende\ a\ 0\ entonces$

$$e^{\lim\limits_{n\to\infty}(ln9+ln25).\frac{1}{2}}=e^{(2ln3+2ln5)\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$e^{(ln3+ln5)}=e^{ln15}=15$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(5^{\frac{1}{n}}-1\right).n$$

$$Cambio\ de\ variable:\ \ \frac{1}{n}=w$$

$$Observamos\ que\ cuando\ n\to\infty\ \ \ \frac{1}{n}tien\to 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(5^{\frac{1}{n}}-1\right).n=\lim_{w\to 0}(5^{w}-1).\frac{1}{w}=\lim_{w\to 0}\frac{(5^{w}-1)}{w}=ln5$$

$5.-$*Convergencia de una sucesión*

Sea una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ ***es convergente si y solo si*** $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbb{R}}$
y también diremos que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ ***converge a L***

En caso contrario, la sucesión será ***divergente***.

Para definir la convergencia o divergencia de una sucesión basta con ***calcular el límite de su término n − ésimo***

Ejemplo:

Analizar la convergencia de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+} = \dfrac{n^2+3n+1}{3n^2+5}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n+1}{3n^2+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{n^2}+\frac{3n}{n^2}+\frac{1}{n^2}}{\frac{3n^2}{n^2}+\frac{5}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{5}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+0+0}{3+0} = \frac{1}{3}$$

La sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+} = \dfrac{n^2+3n+1}{3n^2+5}$ ***es convergente y converge a*** $\boldsymbol{\frac{1}{3}}$

PITAGORAS ACADEMIA

6. –Teorema de la Media Aritmética y Media Geométrica

6.1. Teorema de la Media Aritmética:

Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ *una sucesión convergente y además* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$

Se cumple que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n} = L$$

6.1. Teorema de la Media Geométrica:

Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ *una sucesión convergente tal que* $a_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{Z}^+$ *y además* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$

Se cumple que:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 . a_2 . a_3 \ldots . a_n} = L$$

7. –Teorema de Bolzano – Weierstrass

Toda sucesión monótona y acotada es convergente

De manera análoga también se conocen los siguientes resultados

Toda sucesión creciente y acotada superiormente es convergente

Toda sucesión decreciente y acotada inferiormente es convergente

Toda sucesión convergente es acotada

$8.-$*Criterios de convergencia de una sucesión*

$8.1.-$*Criterio del Encaje (Sándwich)*

Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}, \{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ *tres sucesiones tales que cumplen*:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L \qquad y\ además: \qquad a_n \le b_n \le c_n \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

Entonces se cumple: $\lim_{n\to\infty} b_n = L$

$8.2.$ *Criterio de D´Alambert (Razón)*

Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ *una sucesión y sea* $\quad L = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

$$Si\ L = \begin{cases} L > 1 \ \to La\ sucesión\ es\ divergente \\ L = 1 \ \to No\ se\ puede\ afirmar\ nada \\ 0 < L < 1 \ \to La\ sucesión\ \ es\ convergente\ y\ converge\ a\ 0 \end{cases}$$

23. Dada la sucesión $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$

Podemos afirmar que

I. La sucesion es divergente

II. La sucesión es acotada

III. La sucesión convergente

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$$

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} 0 = \frac{((n+1)n^n)}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = e^{\left(\frac{n}{n+1}-1\right)n}$$

$$L = \frac{1}{e} \qquad a_n si\ converge\ y\ converge\ a\ 0$$

$\underline{\boldsymbol{8.3. Criterio\ de\ Stolz - César o}}$

$Sea\ \{\boldsymbol{b_n}\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ $\boldsymbol{es\ una\ sucesión\ monótona\ y\ divergente\ a} + \infty$ $\ y\ \{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}\ cualquier\ sucesión$

$o\ también\ sea\ \boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0\ y\ \{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}\ es\ una\ sucesión\ monótona}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$$

9. – *Aproximación de Stirling*

En cálculos de alguno límites es útil usar la aproximación de Stirling

Para valores muy grandes de n (*es decir* $n \to \infty$)

$$\boldsymbol{n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}}$$